Ștefan SMARANDACHE

Camelia DIACONU Liliana DIACONU

MATEMATICĂ

pentru clasa a VI-a

EXERCIȚII
PROBLEME
TESTE

SIGMA

CUPRINS

TESTE INIȚIALE

Testul 1

1. Scrieți numărul 13673 ca sumă de două pătrate perfecte.
2. Aflați cel mai mare număr natural n pentru care suma a n multipli naturali, nenuli și diferiți doi câte doi, ai lui 136 este egală cu 136^2.
3. Aflați câtul și restul împărțirii numărului $5n + 8$ la $n + 1$, unde n este număr natural nenul.
4. Numărul 2 este ridicat la cub sau este înmulțit cu 6, iar rezultatului obținut i se aplică același procedeu. Este posibil să obținem, după un număr de pași, numărul 1728? Dar numărul 5184?

Testul 2

1. Aflați câte numere putem forma cu cifrele 1, 3, 5, 7, 9, din baza zece, astfel încât fiecare număr obținut să îndeplinească simultan condițiile:
   a) să conțină cifrele 1 și 3;
   b) suma cifrelor sale să fie cel puțin egală cu 17;
   c) să nu aibă cifre egale.
2. Aflați cel mai mic număr natural n, știind că $n + 2$ este divizibil cu 31, iar $n + 3$ este divizibil cu 126.
3. Dacă numerele naturale a, b, c, d verifică relația
   $a(1 + b) + b(1 + a) = c(1 + d) + d(1 + c)$, atunci arătați că $a + b + c + d$ este număr natural par.
4. Scrieți numărul 189^n ca sumă de trei pătrate perfecte, unde n este număr natural nenul.

Testul 3

1. Fie a, b, c, d, e numere naturale nenule. Știind că $c + 4d + 5e = 41$ și $41a + 82b + 172c + 196d + 245e = 2 \cdot 2009$, arătați că $a + 2b + 3c$ este pătrat perfect.
2. Fie mulțimea $A = \{4, 15, 24, m\}$, unde $m \in \mathbb{N}$. Arătați că există $n, p \in A$, astfel încât numărul $n + p - 3$ nu este pătrat perfect.
3. Arătați că nu există $n \in \mathbb{N}$, astfel încât $n^{2014} = n^{2013} + 2015$.

4. Demonstrați că numărul $N = 6^{61} + 6^{62} + 6^{63} + ... + 6^{128}$ este divizibil cu 259.

Testul 4

1. Aflați primele și ultimele cinci cifre ale numărului $8^{2004} \cdot 5^{6015} + 370$.
2. Pe o tablă sunt scrise numerele 2, 4, 6, 8, ..., 2012. Se șterg două numere și se înlocuiesc cu produsul lor. Se continuă această operație până când pe tablă rămân numai două numere. Este posibil ca ultimele două numere rămase să fie pătrate perfecte?
3. Fie x, y numere naturale. Demonstrează că 7 divide $x + 4y$ dacă și numai dacă 7 divide $2x + y$.
4. a) Calculați $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$.
   b) Arătați că există numerele naturale nenule a, b, c, d astfel încât $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 10^{2009}$.

Testul 5

1. Aflați $n \in \mathbb{N}$ pentru care suma cifrelor numărului $2^{n+1} \cdot 5^n - 3$ este egală cu 53.
2. Se consideră numărul $N = \overline{ab5} + \overline{ab} + \overline{a2b}$, unde a și b sunt cifre în baza zece.
   a) Determinați restul împărțirii lui N la 6.
   b) Determinați valorile lui b pentru care restul împărțirii lui N la $\overline{ab}$ este egal cu 7.
3. Arătați că:
   a) numărul $5^n + 3$ este divizibil cu 4, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$;
   b) numărul $2^{5^n+3} + 7^{5^n+3}$ nu este pătrat perfect, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.
4. Arătați că, oricum am considera 7 pătrate perfecte, există două a căror diferență se divide cu 10.

Testul 6

1. Fie mulțimea $A = \{2^{n+1} \cdot 5^n + 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$.
   a) Arătați că $2001 \in A$.
   b) Arătați că A nu conține niciun pătrat perfect.

2. Arătaţi că numerele de forma $2^{n+3} \cdot 3^{n+2} \cdot 5^{n+1} - 360$ sunt divizibile cu $30^n - 1$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Se consideră mulţimile $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ şi $B = \{b_1, b_2, b_3\}$. Dacă $A = B$ şi $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{N}$, atunci arătaţi că $(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)(a_3 + b_3)$ este număr par.

4. Aflaţi ultimele trei cifre ale numărului $n = 7^1 + 7^2 + 7^3 + ... + 7^{2008}$.

Testul 7

1. Arătaţi că numărului $10^{n+2010} - 10^n$ nu este pătrat perfect, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

2. Dacă $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ şi $a + b + c + d$ este număr impar, atunci arătaţi că numerele $\frac{a+b}{c+d}, \frac{b+c}{d+a}, \frac{d+a}{b+c}$ nu pot fi simultan egale.

3. Numărul natural x nu este pătrat perfect şi produsul divizorilor săi naturali este P. Aflaţi x ştiind că $P = 5^6 \cdot x$.

4. Fie $S(n)$ suma numerelor naturale care sunt cel puţin egale cu 3^n şi strict mai mici de 3^{n+1}, n fiind număr natural nenul. Arătaţi că:
a) $E(n) = S(n) + 3^n$ este pătrat perfect;
b) $E(0) + E(1) + E(2) + ... + E(2012)$ este divizibil cu 364.

Testul 8

1. Determinaţi numerele naturale, pare, nenule, n pentru care $n^3 + n + 5$ se divide cu $2n - 1$.

2. Arătaţi că suma a n numere naturale, impare, consecutive, mai mari sau egale cu $n^2 - n + 1$ este egală cu n^3.

3. Arătaţi că există $x, y, z \in \mathbb{N}^*$, $x \neq y \neq z \neq x$, astfel încât $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{3^2}$.

4. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât n, $3n - 1$, $3n + 1$ şi $6n - 1$ nu sunt divizibile cu 5. Arătaţi că:
a) $7n + 2$ este divizibil cu 5;
b) $n + 4$ nu este pătrat perfect.

ALGEBRĂ

I. Numere naturale

II. Operații cu numere raționale pozitive

III. Rapoarte și proporții

IV. Numere întregi

I. NUMERE NATURALE

Câteva noțiuni teoretice

• ***Divizibilitate***

Vom spune că numărul natural „*a*” este divizibil cu numărul natural „*b*”, dacă există un număr natural „*c*” astfel încât: $a = b \cdot c$.

Toate numerele naturale „la care” se împarte exact „*a*” se numesc *divizori* ai numărului *a*. Vom nota cu D_a mulţimea divizorilor lui *a*.

<u>*Exemplu:*</u> $D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.

Toate numerele naturale „care” se împart exact la „*a*” se numesc *multiplii* ai numărului *a*. Vom nota cu M_a mulţimea multiplilor lui *a*.

Multiplii unui număr natural *a* se obţin după regula $\boldsymbol{a \cdot k}$, cu *k* număr natural.

<u>*Exemplu:*</u> $M_6 = \{0, 6, 12, 18, 24, ...\}$.

Observaţie: Dacă $n = a_1^{b_1} \cdot a_2^{b_2} \cdot a_3^{b_3} \cdot ...$, atunci numărul divizorilor numărului *n* este egal cu : $(b_1 + 1) \cdot (b_2 + 1) \cdot (b_3 + 1) \cdot ...$

• ***Cel mai mare divizor comun (c. m. m. d. c.)***

- se descompun numerele în factori primi;
- se înmulţesc factorii comuni la puterea cea mai mică.

Observaţii: - Dacă *c. m. m. d. c.* a două numere naturale *a* şi *b* este 1, atunci vom spune că *a* şi *b* sunt *numere prime între ele* şi vom nota: $(a; b) = 1$.

- Pentru a aduce o fracţie la forma ei ireductibilă, se poate simplifica prin *c. m. m. d. c.* dintre numărător şi numitor.

• ***Cel mai mic multiplu comun [c. m. m. m. c.]***

- se descompun numerele în factori primi;
- se înmulţesc factorii comuni şi necomuni la puterea cea mai mare.

Observaţie: Pentru a aduce la acelaşi numitor două sau mai multe fracţii, se poate calcula *c. m. m. m. c.* al tuturor numitorilor fracţiilor respective.

• ***Legătura dintre c. m. m. d. c. şi c. m. m. m. c. a două numere naturale***

$(a; b) \cdot [a; b] = a \cdot b$

• ***Proprietăţi ale divizibilităţii***

- $a \mid a$
- dacă $a \mid b$, atunci $a \mid b \cdot c$
- dacă $a \mid b$ şi $b \mid c$, atunci $a \mid c$
- dacă $a \mid b$ şi $a \mid c$, atunci $a \mid (b \pm c)$.

Observaţie: folosind ultima proprietate, putem deduce divizibilitatea unui număr cu: 6, 12, 15, 18, ...

Exemplu: Cum $6 = 2 \cdot 3$ şi $(2; 3) = 1$, vom putea spune că un număr este divizibil cu 6 dacă este divizibil şi cu 2 şi cu 3.

Probleme propuse

Mulţimea numerelor naturale

1. Reprezentaţi pe axa numerelor punctele A, B, C, D de coordonate 2, 3, 6 şi respectiv 9, folosind ca unitate de măsură 1 cm. Aflaţi lungimile segmentelor OA, OC, AB, BC, BD, $OC + CD$, $AD - AC$, unde O este originea axei.

2. Pe axa numerelor cu originea O considerăm punctele $A(4)$, $B(11)$, $C(x)$. Aflați x știind că:

a) C este situat între O și A și x este impar;

b) C este situat între A și B și x este par.

3. a) Ordonați crescător numerele: 2112; 2211; 2121; 1221.

b) Ordonați descrescător numerele: 1532; 1351; 1325; 1253.

4. Efectuați:

a) $16 + 3 \cdot (12 - 3 \cdot 2)$; b) $25 - 2 \cdot (18 - 5 \cdot 3)$;

c) $4 \cdot [6 + 5 \cdot (17 - 30 : 2)]$; d) $[9 + 45 : (14 - 15 : 3)] \cdot 8$;

e) $11 \cdot \{3 + 2 \cdot [18 - 15 \cdot (9 - 16 : 2)]\}$;

f) $\{6 + 36 : [4 + 2 \cdot (13 - 6 \cdot 2)]\} : 6 - 1$.

5. Știind că:

a) $x \cdot y = 16$ și $x \cdot z = 18$, calculați $x \cdot (y + z)$;

b) $x \cdot (y - z) = 36$, calculați $2xy - 2xz$;

c) $x \cdot y + x \cdot z = 42$ și $y + z = 7$, calculați x;

d) $3xy - 3xz = 48$ și $x = 2$, calculați $y - z$;

e) $x + y = 9$ și $y + z = 10$, calculați $3x + 5y + 2z$.

6. Calculați:

a) $3^2 + 2^3 - 11^0$; b) $5^2 + 2^5 - 2 \cdot 5$;

c) $3^3 - 2 \cdot 3^2 + 2^2 \cdot 3 - 2^3$; d) $3^6 : 3^3 + 2^2 \cdot 2 - (5^7)^0$;

e) $[2^4 \cdot 2^3 + (3^5)^2] : (2^5 \cdot 2^2 + 3^{12} : 3^2)$;

f) $(5^3 \cdot 25^2 - 2^6 : 4^2 + 49^4) : (5^8 : 5 - 2^2 + 7^3 \cdot 7^5)$;

g) $(2^4 \cdot 3^2)^8 : (2^2 \cdot 3)^{15} - 2^{11} : 2^9$.

7. Arătați că numărul:

$x = 2^1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{99}$ este pătrat perfect;

$y = 3^1 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{30}$ nu este pătrat perfect.