



Ștefan SMARANDACHE

Camelia DIACONU

Liliana DIACONU

MATEMATICĂ

pentru clasa a VI-a

**EXERCIIȚII
PROBLEME
TESTE**

Teste inițiale	3
----------------------	---

ALGEBRĂ

I. NUMERE NATURALE

<i>Câteva noțiuni teoretice</i>	8
Mulțimea numerelor naturale	9
Divizor. Multiplu	10
Criteriile de divizibilitate cu 2, 5, 10, 3	11
Proprietăți ale relației de divizibilitate în $\mathbb{N}$	13
Numere prime. Numere compuse	14
Descompunerea numerelor naturale în produs de puteri de numere prim	15
Divizori comuni. C.m.m.d.c. al mai multor numere naturale. Numere prime între ele	16
Multipli comuni. C.m.m.m.c. al mai multor numere naturale	18
Teste de verificare	19

II. OPERAȚII CU NUMERE RAȚIONALE POZITIVE

<i>Câteva noțiuni teoretice</i>	21
Fracții	22
Număr rațional pozitiv	24
Aducerea fracțiilor la același numitor	25
Adunarea numerelor raționale pozitive. Proprietăți	25
Compararea și ordonarea numerelor raționale pozitive	26
Scăderea numerelor raționale pozitive	27
Înmulțirea numerelor raționale pozitive. Proprietăți	28
Împărțirea numerelor raționale pozitive	30
Ordinea efectuării operațiilor	31
Puterea unui număr rațional pozitiv	32
Numere raționale scrise sub formă zecimală	33
Operații cu numere raționale pozitive	34
Ecuatii	36
Inecuații	37
Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor	38
Teste de verificare	39

III. RAPOARTE ȘI PROPORȚII

<i>Câteva noțiuni teoretice</i>	41
Raport. Raport procentual	42
Proporții	43
Procente	45
Proportionalitate directă	48
Proportionalitate inversă	52
Elemente de organizare a datelor și probabilități	55
Teste de verificare	57

IV. NUMERE ÎNTREGI

<i>Câteva noțiuni teoretice</i>	59
Număr întreg. Reprezentarea pe axa numerelor. Opusul unui număr întreg	60
Valoarea absolută a unui număr întreg (modulul).	
Compararea și ordonarea numerelor întregi	60
Reprezentarea unui punct cu coordonate întregi într-un sistem de axe ortogonale	61
Adunarea numerelor întregi. Proprietăți	63
Scăderea numerelor întregi	63
Înmulțirea numerelor întregi. Proprietăți	64
Împărțirea numerelor întregi	66
Divizibilitate în $\mathbb{Z}$	67
Puterea cu exponent număr natural a unui număr întreg	69
Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor	70
Rezolvarea unor ecuații în $\mathbb{Z}$	71
Rezolvarea unor inecuații în $\mathbb{Z}$	73
Teste de verificare	74

GEOMETRIE

I. DREAPTA

<i>Câteva noțiuni teoretice</i>	78
Punct. Dreaptă. Plan. Pozițiile relative ale unui punct față de o dreaptă.	
Puncte coliniare	79
Semidreaptă. Semiplan	80
Pozițiile relative a două drepte	81
Segment. Lungimea unui segment. Mijlocul unui segment	82
Teste de verificare	85

II. UNGHIURI

<i>Câteva noțiuni teoretice</i>	88
Definiție, notații, elemente, interior, exterior, unghiul, unghi cu laturile în prelungire	90
Măsura unghiurilor. Unghiuri congruente	91
Calcul cu măsuri de unghiuri	92
Unghiuri adiacente. Bisectoarea unui unghi	93
Unghiuri suplementare. Unghiuri complementare	95
Unghiuri opuse la vârf	98
Unghiuri în jurul unui punct	99
Teste de verificare	100

III. CONGRUENȚA TRIUNGHIURILOR

<i>Câteva noțiuni teoretice</i>	103
Triunghiul: definiție, elemente	105
Perimetrul triunghiului	105
Construcția triunghiurilor	107

Congruența triunghiurilor oarecare	108
Criterii de congruență a triunghiurilor oarecare	108
Elemente de raționament geometric	110
Metoda triunghiurilor congruente	110
Teste de verificare	113

IV. PERPENDICULARITATE

<i>Câteva noțiuni teoretice</i>	116
Drepte perpendiculare; oblice; distanța de la un punct la o dreaptă	118
Cazurile de construcție și criteriile de congruență a triunghiurilor dreptunghice	120
Mediatoarea unui segment. Mediatoarele laturilor unui triunghi	121
Bisectoarea unui unghi. Bisectoarele unghiurilor unui triunghi	123
Teste de verificare	125

V. PARALELISM

<i>Câteva noțiuni teoretice</i>	128
Metoda reducerii la absurd	130
Unghiuri formate de două drepte cu o secantă. Drepte paralele	130
Criterii de paralelism	131
Unghiuri formate de două drepte paralele cu o secantă. Axioma paralelelor	132
Teste de verificare	135

VI. PROPRIETĂȚI ALE TRIUNghiURILOR

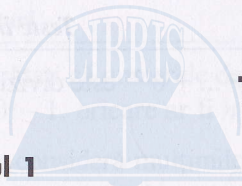
<i>Câteva noțiuni teoretice</i>	139
Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi	143
Unghi exterior unui triunghi	144
Înălțimea în triunghi	145
Aria triunghiului	146
Mediana în triunghi	147
Simetria față de o dreaptă	148
Proprietățile triunghiului isoscel	148
Proprietățile triunghiului echilateral	152
Proprietățile triunghiului dreptunghic	154
Teste de verificare	155

TESTE DE EVALUARE

Teste de evaluare (semestrul I)	160
Modele de teză semestrială (semestrul I)	163
Teste de evaluare (semestrul II)	165
Modele de teză semestrială (semestrul II)	168
Teste finale	170
Teste pentru pregătirea olimpiadei	175

RĂSPUNSURI

Teste inițiale	186
Algebră	189
Geometrie	204
Teste de evaluare	218



TESTE ÎNIIIALE

Testul 1

1. Scrieți numărul 13673 ca sumă de două pătrate perfecte.
2. Aflați cel mai mare număr natural n pentru care suma a n multipli naturali, nenuli și diferiți doi câte doi, ai lui 136 este egală cu 136^2 .
3. Aflați câtul și restul împărțirii numărului $5n + 8$ la $n + 1$, unde n este număr natural nenul.
4. Numărul 2 este ridicat la cub sau este înmulțit cu 6, iar rezultatului obținut i se aplică același procedeu. Este posibil să obținem, după un număr de pași, numărul 1728? Dar numărul 5184?

Testul 2

1. Aflați câte numere putem forma cu cifrele 1, 3, 5, 7, 9, din baza zece, astfel încât fiecare număr obținut să îndeplinească simultan condițiile:
a) să conțină cifrele 1 și 3;
b) suma cifrelor sale să fie cel puțin egală cu 17;
c) să nu aibă cifre egale.
2. Aflați cel mai mic număr natural n , știind că $n + 2$ este divizibil cu 31, iar $n + 3$ este divizibil cu 126.
3. Dacă numerele naturale a, b, c, d verifică relația $a(1 + b) + b(1 + a) = c(1 + d) + d(1 + c)$, atunci arătați că $a + b + c + d$ este număr natural par.
4. Scrieți numărul 189^n ca sumă de trei pătrate perfecte, unde n este număr natural nenul.

Testul 3

1. Fie a, b, c, d, e numere naturale nenule. Știind că $c + 4d + 5e = 41$ și $41a + 82b + 172c + 196d + 245e = 2 \cdot 2009$, arătați că $a + 2b + 3c$ este pătrat perfect.
2. Fie mulțimea $A = \{4, 15, 24, m\}$, unde $m \in \mathbb{N}$. Arătați că există $n, p \in A$, astfel încât numărul $n + p - 3$ nu este pătrat perfect.
3. Arătați că nu există $n \in \mathbb{N}$, astfel încât $n^{2014} = n^{2013} + 2015$.

4. Demonstrați că numărul $N = 6^{61} + 6^{62} + 6^{63} + \dots + 6^{128}$ este divizibil cu 259.

Testul 4

1. Aflați primele și ultimele cinci cifre ale numărului $8^{2004} \cdot 5^{6015} + 370$.
2. Pe o tablă sunt scrise numerele 2, 4, 6, 8, ..., 2012. Se șterg două numere și se înlocuiesc cu produsul lor. Se continuă această operație până când pe tablă rămân numai două numere. Este posibil ca ultimele două numere rămase să fie pătrate perfecte?
3. Fie x, y numere naturale. Demonstrează că 7 divide $x + 4y$ dacă și numai dacă 7 divide $2x + y$.
4. a) Calculați $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$.
b) Arătați că există numerele naturale nenule a, b, c, d astfel încât $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 10^{2009}$.

Testul 5

1. Aflați $n \in \mathbb{N}$ pentru care suma cifrelor numărului $2^{n+1} \cdot 5^n - 3$ este egală cu 53.
2. Se consideră numărul $N = \overline{ab5} + \overline{ab} + \overline{a2b}$, unde a și b sunt cifre în baza zece.
a) Determinați restul împărțirii lui N la 6.
b) Determinați valorile lui b pentru care restul împărțirii lui N la $\overline{ab}$ este egal cu 7.
3. Arătați că:
a) numărul $5^n + 3$ este divizibil cu 4, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$;
b) numărul $2^{5^n+3} + 7^{5^n+3}$ nu este pătrat perfect, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.
4. Arătați că, oricum am considera 7 pătrate perfecte, există două a căror diferență se divide cu 10.

Testul 6

1. Fie mulțimea $A = \{2^{n+1} \cdot 5^n + 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$.
a) Arătați că $2001 \in A$.
b) Arătați că A nu conține niciun pătrat perfect.

- Arătați că numerele de forma $2^{n+3} \cdot 3^{n+2} \cdot 5^{n+1} - 360$ sunt divizibile cu $30^n - 1$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.
- Se consideră mulțimile $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ și $B = \{b_1, b_2, b_3\}$. Dacă $A = B$ și $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{N}$, atunci arătați că $(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)(a_3 + b_3)$ este număr par.
- Aflați ultimele trei cifre ale numărului $n = 7^1 + 7^2 + 7^3 + \dots + 7^{2008}$.

Testul 7

- Arătați că numărului $10^{n+2010} - 10^n$ nu este pătrat perfect, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.
- Dacă $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ și $a + b + c + d$ este număr impar, atunci arătați că numerele $\frac{a+b}{c+d}, \frac{b+c}{d+a}, \frac{d+a}{b+c}$ nu pot fi simultan egale.
- Numărul natural x nu este pătrat perfect și produsul divizorilor săi naturali este P . Aflați x știind că $P = 5^6 \cdot x$.
- Fie $S(n)$ suma numerelor naturale care sunt cel puțin egale cu 3^n și strict mai mici de 3^{n+1} , n fiind număr natural nenul. Arătați că:
 - $E(n) = S(n) + 3^n$ este pătrat perfect;
 - $E(0) + E(1) + E(2) + \dots + E(2012)$ este divizibil cu 364.

Testul 8

- Determinați numerele naturale, pare, nenule, n pentru care $n^3 + n + 5$ se divide cu $2n - 1$.
- Arătați că suma a n numere naturale, impare, consecutive, mai mari sau egale cu $n^2 - n + 1$ este egală cu n^3 .
- Arătați că există $x, y, z \in \mathbb{N}^*$, $x \neq y \neq z \neq x$, astfel încât $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{3^2}$.
- Fie $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $n, 3n - 1, 3n + 1$ și $6n - 1$ nu sunt divizibile cu 5. Arătați că:
 - $7n + 2$ este divizibil cu 5;
 - $n + 4$ nu este pătrat perfect.



ALGEBRĂ

I. Numere naturale

II. Operații cu numere raționale pozitive

III. Rapoarte și proporții

IV. Numere întregi

I. NUMERE NATURALE

Câteva noțiuni teoretice

• Divizibilitate

Vom spune că numărul natural „ a ” este divizibil cu numărul natural „ b ”, dacă există un număr natural „ c ” astfel încât: $a = b \cdot c$.

Toate numerele naturale „la care” se împarte exact „ a ” se numesc *divizori* ai numărului a . Vom nota cu D_a mulțimea divizorilor lui a .

Exemplu: $D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.

Toate numerele naturale „care” se împart exact la „ a ” se numesc *multiplii* ai numărului a . Vom nota cu M_a mulțimea multiplilor lui a .

Multiplii unui număr natural a se obțin după regula $a \cdot k$, cu k număr natural.

Exemplu: $M_6 = \{0, 6, 12, 18, 24, \dots\}$.

Observație: Dacă $n = a_1^{b_1} \cdot a_2^{b_2} \cdot a_3^{b_3} \cdot \dots$, atunci numărul divizorilor numărului n este egal cu: $(b_1 + 1) \cdot (b_2 + 1) \cdot (b_3 + 1) \cdot \dots$

• Cel mai mare divizor comun (c. m. m. d. c.)

- se descompun numerele în factori primi;
- se înmulțesc factorii comuni la puterea cea mai mică.

Observații: - Dacă c. m. m. d. c. a două numere naturale a și b este 1, atunci vom spune că a și b sunt *numere prime între ele* și vom nota: $(a; b) = 1$.

- Pentru a aduce o fracție la forma ei ireductibilă, se poate simplifica prin c. m. m. d. c. dintre numărător și numitor.

• Cel mai mic multiplu comun [c. m. m. c.]

- se descompun numerele în factori primi;
- se înmulțesc factorii comuni și necomuni la puterea cea mai mare.

Observație: Pentru a aduce la același numitor două sau mai multe fracții, se poate calcula c. m. m. c. al tuturor numitorilor fracțiilor respective.

• Legătura dintre c. m. m. d. c. și c. m. m. c. a două numere naturale

$$(a; b) \cdot [a; b] = a \cdot b$$

• Proprietăți ale divizibilității

- $a \mid a$
- dacă $a \mid b$, atunci $a \mid b \cdot c$
- dacă $a \mid b$ și $b \mid c$, atunci $a \mid c$
- dacă $a \mid b$ și $a \mid c$, atunci $a \mid (b \pm c)$.

Observație: folosind ultima proprietate, putem deduce divizibilitatea unui număr cu: 6, 12, 15, 18, ...

Exemplu: Cum $6 = 2 \cdot 3$ și $(2; 3) = 1$, vom putea spune că un număr este divizibil cu 6 dacă este divizibil și cu 2 și cu 3.

Probleme propuse

Mulțimea numerelor naturale

1. Reprezentați pe axa numerelor punctele A, B, C, D de coordonate 2, 3, 6 și respectiv 9, folosind ca unitate de măsură 1 cm. Aflați lungimile segmentelor $OA, OC, AB, BC, BD, OC + CD, AD - AC$, unde O este originea axei.
2. Pe axa numerelor cu originea O considerăm punctele $A(4), B(11), C(x)$. Aflați x știind că:
 - a) C este situat între O și A și x este impar;
 - b) C este situat între A și B și x este par.
3.
 - a) Ordonăți crescător numerele: 2112; 2211; 2121; 1221.
 - b) Ordonăți descrescător numerele: 1532; 1351; 1325; 1253.
4. Efectuați:
 - a) $16 + 3 \cdot (12 - 3 \cdot 2)$;
 - b) $25 - 2 \cdot (18 - 5 \cdot 3)$;
 - c) $4 \cdot [6 + 5 \cdot (17 - 30 : 2)]$;
 - d) $[9 + 45 : (14 - 15 : 3)] \cdot 8$;
 - e) $11 \cdot \{3 + 2 \cdot [18 - 15 \cdot (9 - 16 : 2)]\}$;
 - f) $\{6 + 36 : [4 + 2 \cdot (13 - 6 \cdot 2)]\} : 6 - 1$.
5. Știind că:
 - a) $x \cdot y = 16$ și $x \cdot z = 18$, calculați $x \cdot (y + z)$;
 - b) $x \cdot (y - z) = 36$, calculați $2xy - 2xz$;
 - c) $x \cdot y + x \cdot z = 42$ și $y + z = 7$, calculați x ;
 - d) $3xy - 3xz = 48$ și $x = 2$, calculați $y - z$;
 - e) $x + y = 9$ și $y + z = 10$, calculați $3x + 5y + 2z$.
6. Calculați:
 - a) $3^2 + 2^3 - 11^0$;
 - b) $5^2 + 2^5 - 2 \cdot 5$;
 - c) $3^3 - 2 \cdot 3^2 + 2^2 \cdot 3 - 2^3$;
 - d) $3^6 : 3^3 + 2^2 \cdot 2 - (5^7)^0$;
 - e) $[2^4 \cdot 2^3 + (3^5)^2] : (2^5 \cdot 2^2 + 3^{12} : 3^2)$;
 - f) $(5^3 \cdot 25^2 - 2^6 : 4^2 + 49^4) : (5^8 : 5 - 2^2 + 7^3 \cdot 7^5)$;
 - g) $(2^4 \cdot 3^2)^8 : (2^2 \cdot 3)^{15} - 2^{11} : 2^9$.
7. Arătați că numărul:
 $x = 2^1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{99}$ este pătrat perfect;
 $y = 3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{30}$ nu este pătrat perfect.